LIBRIS | We know books

DINCOLO DE EUCLID

Geometrii alternative

JOAN-VICENÇ GÓMEZ I URGELLÉS

Traducere de Anca Dinu

LITERA
București

LIBRIS | We know books

CUPRINS

LIBRIS | We know books

LIBRIS We know books

Capitolul 0

Una sau mai multe geometrii?

Geometria este alcătuită din propoziții și teoreme bazate pe postulate deduse din experiență. Cele cinci postulate ale lui Euclid constituie baza geometriei grecești, care a dominat această disciplină până la sfârșitul secolului al XVIII-lea. Dintre acestea, ultimul – „printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă la dreapta dată" – a devenit imediat cel mai studiat și controversat, frecvent pus în dezbatere. Dezbatere cât se poate de fructuoasă, după cum se va dovedi.

Spre deosebire de celelalte, al cincilea postulat nu poate fi dedus din experiență sau demonstrat empiric. Este imposibil să ne deplasăm în cel mai depărtat punct pe care ni-l putem imagina, pentru a verifica dacă aceste linii se intersectează sau nu. Încercările de depășire a acestui impediment se întind de-a lungul istoriei de la filosoful grec **Proclo** (412-485 d.Hr.), trecând, printre alții, și pe la **Girolamo Saccheri** (1667-1733) sau **J.H. Lambert** (1728-1777) și până în secolul al XVII-lea, la **A.M. Legendre** (1752-1833), care și-a dedicat 40 de ani din viață pentru a încerca să demonstreze postulatul dreptelor paralele.

Însă aceste încercări de demonstrare a celui de-al cincilea postulat au eșuat de fiecare dată în același mod: ajungând să folosească tacit rezultatul pe care ar trebui să îl demonstreze. Astfel, comunitatea

LIBRIS We know books

CELE CINCI POSTULATE ALE LUI EUCLID

În jurul anului 300 î.Hr., Euclid scrie *Elemente*, cel mai vechi text cunoscut de noi din întreaga istorie a matematicii, dedicat integral geometriei. Această carte, cea mai publicată după Biblie, conține cele cinci postulate care, în mod simplu și logic, dau naștere geometriei euclidiene.

Un postulat este o propoziție al cărei adevăr este admis fără dovezi și care este necesară ca bază pentru raționamente ulterioare.

I. Prin oricare două puncte se poate trasa o linie dreaptă.
II. Orice segment de dreaptă se poate prelungi la infinit.
III. Se poate trasa un cerc cu centrul într-un punct și cu o rază dată.
IV. Toate unghiurile drepte sunt egale.

matematică s-a convins că postulatul paralelelor este cu adevărat un postulat, independent de celelalte și că, în consecință, orice tentativă de a-l deduce din celelalte patru este sortită eșecului. Și totuși, a fost sădită sămânța unui nou început.

Într-adevăr, imposibilitatea de a demonstra al cincilea postulat a devenit germenul altor geometrii coerente și posibile. Primii care fructifică încercările predecesorilor lor sunt matematicieni precum **János Bolyai** (1802-1860), **Nikolaj I. Lobacevski** (1793-1856) și **J.C. Friedrich Gauss** (1777-1855), pionierii geometriei hiperbolice, un sistem care satisface doar primele patru postulate ale geometriei euclidiene. „Am creat un nou univers din nimic.", afirma Bolyai după descoperirea sa.

§

LIBRIS | We know books

V. Cunoscut și sub numele de postulatul liniilor paralele, acest postulat a fost enunțat inițial după cum urmează: Dacă o dreaptă intersectează alte două drepte, iar suma unghiurilor interne este mai mică decât cea a două unghiuri drepte, atunci, dacă prelungim cele două drepte la infinit, acestea se vor intersecta.

Există multe enunțuri echivalente cu acest din urmă postulat, însă cel mai cunoscut este poate următorul: „Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură paralelă cu cea dată". Această echivalență a fost stabilită de **John Playfair** (1748-1819) în anul 1795.

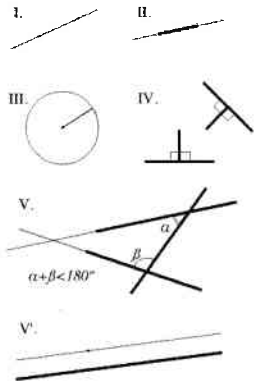

Figura 1. Cele cinci postulate.

János Bolyai era funcționar al cavaleriei ungare, iar matematica era pentru el doar un hobby, moștenit cu siguranță de la tatăl său, matematicianul Farkas Bolyai, care îl învățase pe tânărul János, de doar treisprezece ani, noțiuni de calcul infinitezimal și de mecanică analitică.

Poate că înadins influențat de către tatăl său, Bolyai studiază de mic problema paralelelor, până în punctul în care ajunge obsedat de aceasta. Când tatăl află că János încearcă să demonstreze al cincilea postulat, îi trimite o scrisoare, datată 1820, în care îi cere să renunțe la acest proiect:

> Pentru numele lui Dumnezeu, te rog, renunță. Teme-te de această pasiune a ta ca de pasiunile senzuale, pentru că, asemeni lor, poate ajunge să îți consume tot timpul și să te lipsească de sănătate, de liniște sufletească și de fericire în viață. Gaura asta neagră ar fi capabilă să devoreze și o mie de Newtoni.

LIBRIS | We know books

Dar Bolyai ignoră avertismentul tatălui. Rămâne convins că al cincilea postulat nu poate fi demonstrat plecând de la primele patru. În 1823, îi răspunde tatălui printr-o scrisoare:

> Am hotărât să public un articol despre teoria paralelelor. Trebuie să mai rearanjez notițele și să îl completez, dar am făcut descoperiri minunate; m-au copleșit și nu mi-aș ierta-o niciodată dacă nu le-aș publica. Am creat un univers nou din nimic...

Iar tatăl îi răspunde:

> Dacă ai ajuns într-adevăr la soluția problemei, trebuie să o publici numaidecât, din două motive: în primul rând, pentru că ideile trec foarte repede de la unul la altul și altcineva ți-ar putea-o lua înainte cu publicarea; iar în al doilea rând, pentru că, în mod cert, multe lucruri au un timp al lor, în care apar concomitent prin toate părțile, așa cum primăvara violetele răsar mai peste tot...

Farkas nu se înșela. Acesta a vrut să împărtășească descoperirile fiului său cu un vechi prieten, J.C. Friedrich Gauss. Se pare că Gauss nu văzuse această pre-publicare, ci că a citit direct opera publicată în 1832, în care János prezenta teoria lui într-o anexă de 26 de pagini dintr-o carte a tatălui său: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae introenci*. În această anexă, tânărul Bolyai definește paralelele astfel:

> Dacă segmentul *AM* nu este intersectat de segmentul *BN* situat în același plan, dar este intersectat de toate segmentele *BP* aflate în interiorul unghiului *ABN*, atunci spunem că segmentul *BN* e paralel cu segmentul *AM*.[1]

[1] Bolyai J., 1832, p. 5. Secțiunea: „The Science Absolute of Space", în Bonola R. (1906), *Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications.

LIBRIS | We know books

Răspunsul lui Gauss nu s-a lăsat așteptat. În mai puțin de o lună, îi trimite o scrisoare dezamăgitoare, în care scrie, printre altele:

> În ceea ce privește lucrarea fiului tău, aș începe prin a-ți spune, chiar dacă te va surprinde pe moment, că dacă l-aș lăuda, ar fi ca și cum m-aș lăuda singur, pentru că întregul conținut al operei sale, derularea acesteia și concluziile coincid aproape în întregime cu ideile mele, de care m-am ocupat în ultimii treizeci – treizeci și cinci de ani. Acest lucru m-a lăsat fără cuvinte...

Ne putem imagina deziluzia ambilor Bolyai, tată și fiu, dar mai presus de toate a celui din urmă, atunci când au descoperit că Gauss deja cunoștea cel puțin ideile lui János. Dar de ce Gauss nu a dezvoltat ideea și nu a publicat nimic pe această temă?

Figura 2. János Bolyai.

Această lovitură l-a făcut pe Bolyai să nu mai publice nimic niciodată. A lăsat în schimb o moștenire de 20 000 de pagini de manuscrise conservate la biblioteca din Târgu-Mureș, în România.

Din păcate, Bolyai nu a aflat niciodată de fraza scrisă de Gauss, pe 14 februarie 1832, într-o scrisoare adresată lui **C.L. Gerling** (1788-1864): „Îl consider pe acest tânăr geometru un geniu de prima mână".

Descoperirile lui Bolyai și Gauss au fost făcute aproape simultan, dar independent de cele făcute de N. Lobacevski. Chiar dacă acesta din urmă are mai multe merite. Pe de o parte, a fost primul care a realizat că al cincilea postulat al lui Euclid nu poate fi dedus din alte propoziții fundamentale ale matematicii și care a îndrăznit să nege „adevărul evident" al acestui postulat. Prin munca lui, demonstrează nu doar că al cincilea postulat nu poate fi demonstrat, ci un lucru mult

LIBRIS | We know books

mai important: și anume că din punct de vedere strict logic se pot concepe mai multe geometrii diferite, printre care și cea clasică, a lui Euclid.

Sigur, ideile lui Lobacevski nu au fost acceptate imediat. Astfel de idei radicale, care se ciocnesc de prejudecățile majorității oamenilor de știință, nu își fac loc în știință ușor. Cu toate acestea, Lobacevski le apără, convins de corectitudinea operei sale, și nu ezită să lupte împotriva mentalității dominante a vremii, pe care o consideră învechită și incompatibilă cu progresul științei. Să-i aprofundăm puțin povestea.

Nikolai Lobacevski s-a născut într-un mic oraș rus numit Nizny Novgorod. Viața lui pare să aibă un moment de cotitură când, la vârsta de 9 ani, intră în cea mai prestigioasă școală din Kazan. Aici îl întâlnește pe **G.I. Kartashevski**, un profesor de matematică interesat de științe. Prelegerile sale sunt inspirate din operele faimoșilor matematicieni ai vremii și în special din cartea *Eléments de géométrie* de A.M. Legendre, publicată în 1794. Textul lui Legendre și prelegerile lui Kartashevski au o mare influență asupra operelor de geometrie ale lui Lobacevski.

Anul 1808 marchează o altă etapă importantă în biografia lui Lobacevski: catedra de matematică a Universității Kazan este încredințată unui profesor german, **M.F. Bartels** (1769-1833), un bun matematician, prieten cu Gauss și un excelent comunicator. Se pare că interesul lui Lobacevski pentru problema paralelelor a fost stimulat de participarea sa la cursurile predate de Bartels.

În 1811, Lobacevski își obține diploma în fizică și matematică și la scurt timp după aceea începe să predea la aceeași universitate. La nivel științific, el lucrează la negarea celui de-al cincilea postulat al lui Euclid. Versiunea lui Lobacevski este: „Printr-un punct *P* care nu se află pe dreapta *l* trece, în plan, mai mult de o dreaptă care nu intersectează dreapta *l*".

Una dintre lucrările sale principale, în care apare acest nou spirit geometric, este *Geometria* din 1823. Primele cinci capitole sunt scrise

LIBRIS | We know books

fără a folosi în vreun fel celebrul postulat al cincilea. Din punct de vedere istoric, acest lucru este fundamental, deoarece este primul caz al unei persoane care tratează conştient aşa-numita „geometrie absolută" (cea care nu depinde de postulatul al cincilea, ci doar de primele patru).

Figura 3. Nicolai I. Lobacevski.

Lobacevski realizează că măsurarea unghiurilor şi segmentelor nu depinde de postulatul al cincilea, în timp ce măsurarea ariilor este strâns legată de acesta, motiv pentru care calculul ariilor diferitelor figuri nu este abordat decât în partea finală a cărţii. În tratarea teoriei paralelelor, putem deja întrezări câteva idei care vor fi dezvoltate în producţiile ştiinţifice ulterioare.

Plecând de la negarea celui de-al cincilea postulat, în interpretarea sa proprie, Lobacevski începe să deducă rezultate cu intenţia de a ajunge la vreo contradicţie. Surprinzător însă, construieşte de fapt un nou sistem geometric armonios, pe care îl numeşte „geometrie imaginară" şi pe care îl numim în prezent „geometrie hiperbolică" sau „geometrie Lobacevski". Deşi a fost publicat doar câţiva ani mai târziu, acest text este, fără îndoială, germenul cercetărilor sale ulterioare în acest domeniu.

În ciuda criticilor foarte severe primite, el continuă să lucreze şi să aprofundeze teoria paralelelor. Trei ani mai târziu, la 11 februarie 1826, în timpul unei întâlniri la Facultatea de Fizică şi Matematică, Lobacevski a prezentat un raport prin care urmărea să cunoască părerea colegilor săi cu privire la investigaţiile sale geometrice. Raportul, intitulat *Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du theorème des parallelèles* (1826), exprimă majoritatea ideilor sale inovatoare. Chiar dacă nu a fost publicat, i se cunoaşte conţinutul, deoarece trei ani mai târziu, acelaşi Lobacevski

LIBRIS We know books

publică în revista *Mesagerul din Kazan* un memoriu intitulat „Despre principiile geometriei" (1829). Complexă și dificil de citit, această lucrare este alcătuită din trei părți distincte. Prima se concentrează pe studiul geometriei absolute, menționate mai sus (este de fapt o sinteză a geometriei prezentată în 1823 în modul cel mai neatractiv, despre care tocmai am vorbit). A doua parte ilustrează conținutul lucrării *Exposition succincte...*, și dedică un număr important de pagini studiului și calculului unghiului paralelismului pe care îl notează $\pi(a)$. Ultima parte a cărții este dedicată măsurării lungimilor, ariilor și volumelor, realizată prin intermediul procedeelor de integrare. Lobacevski utilizează procedee de calcul laborioase și diverse, pentru a verifica rezultatele și astfel își întărește convingerea că geometria pe care o construiește este corectă din punct de vedere logic.

Lobacevski scrie:

> Succesul redus al încercărilor făcute după Euclid m-a făcut să bănuiesc că adevărul nu este conținut doar în date și că, pentru a-l atinge, este necesar ajutorul unor experimente ca, de exemplu, observațiile astronomice, așa cum se procedează și pentru alte legi ale naturii.

În 1835, Lobacevski publică *Geometria imaginară*, care a fost urmată la un an de *Aplicarea geometriei imaginare la unele integrale* (1836). Cu mare perseverență, își scrie și își rescrie lucrările din perspective diferite. El este conștient că scrierile sale nu sunt ușor de citit. Concizia, originalitatea abordărilor, consecințele care decurg din teoria sa și faptul că scrie împotriva gândirii geometrice dominante (susținută, printre altele, de filosoful german Immanuel Kant) duc la scrierea unui tratat crucial: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien (Cercetări Geometrice asupra Teoriei Paralelelor)* (1840). Datorită acestei mici cărți scrise în limba germană, comunitatea matematică intră în sfârșit în contact cu ideile geometrice ale lui Lobacevski.

LIBRIS | We know books

Figura 4. J.C. Friedrich Gauss.

Această lucrare l-a impresionat atât de mult pe Gauss încât, în noiembrie 1842, a propus candidatura lui Lobacevski ca membru al Societății Științifice din Göttingen, care avea deja rangul de Academie la acea vreme. Fără îndoială, această recunoaștere de către cel mai mare matematician viu a reprezentat o consacrare a teoriilor sale.

Dar cum se face că acest mare matematician, adesea considerat unul dintre inițiatorii geometriei neeuclidiene, nu a lăsat nicio publicație care să ne permită să îi apreciem contribuțiile la noua geometrie?

Știm că în 1798 Gauss se întoarce la Brunswick pentru a-și continua munca universitară. Singurul său prieten dintre studenți, despre care avem cunoștință, este Farkas Bolyai, cu care corespondează pe parcursul mai multor ani.

Cu câțiva ani înainte, la Göttingen, Gauss studiase posibilitatea existenței unei geometrii neeuclidiene, fiind convins de eșecurile tentativelor precedente de a demonstra postulatul paralelelor. De abia în anul 1813 reușește să dezvolte o geometrie de acest tip. În acel an scrie un tratat despre dreptele paralele și, într-o scrisoare adresată lui **H.K. Schumacher** (astronom german, 1780-1850), spune:

> După ce m-am gândit aproape patruzeci de ani fără să scriu nimic, m-am hotărât să fac efortul de a pune pe hârtie măcar unele dintre ideile mele, astfel încât acestea să nu dispară odată cu mine.

Principala sursă de informații în acest sens sunt notițele sale personale și corespondența pe care a întreținut-o pentru mai bine de treizeci de ani cu anumiți colegi și prieteni. În aceste scrisori, își discută ideile cu privire la posibilitatea dezvoltării unei alte geometrii decât cea euclidiană și prezintă câteva rezultate. Într-un fel, decizia

LIBRIS | We know books

sa de a nu publica are sens, deoarece tendințele universitarilor vremii sunt mai degrabă conservatoare și euclidiene, iar el este șeful Observatorului Astronomic al Universității germane din Göttingen, o instituție de mare prestigiu. Cel mai probabil, acesta se temea să-și expună ideile în public.

Într-o scrisoare trimisă lui **Taurinus** (1794-1874), în 1824, de exemplu, Gauss a cerut discreție absolută asupra ideilor sale de geometrie.

> Ipoteza că suma celor trei unghiuri ale unui triunghi este mai mică de 180° conduce la o geometrie stranie, foarte diferită de a noastră (euclidiană), dar perfect coerentă, pe care am dezvoltat-o spre satisfacția mea deplină, pentru a rezolva orice problemă, cu excepția determinării unei constante, care nu se poate face *a priori*: cu cât este mai mare constanta, cu atât această geometrie se apropie mai mult de cea euclidiană, până în punctul în care coincide cu ea, atunci când constanta este infinit de mare. Teoremele acestei geometrii par paradoxale, chiar absurde pentru neinițiați; dar o reflecție pe îndelete arată că acestea nu conțin nimic absolut imposibil. De exemplu, cele trei unghiuri ale unui triunghi pot deveni oricât de mici s-ar dori, doar întinzând laturile suficient; cu toate acestea, aria triunghiului nu poate depăși niciodată o limită definită, indiferent cât de mult se lungesc laturile și nici măcar nu o poate atinge. Toate eforturile mele de a descoperi o contradicție, o inconsecvență în cadrul acestei geometrii neeuclidiene au fost în zadar și singurul lucru care se opune concepțiilor noastre este că, dacă geometria neeuclidiană ar fi adevărată, în spațiu ar exista o mărime liniară determinată de ea (dar necunoscută pentru noi). Mi se pare că, în ciuda vorbăriei filosofilor, care ignoră totul, știm puțin sau aproape nimic despre adevărata natură a spațiului...

Într-o altă scrisoare trimisă lui Bessel (1784-1846) în 1829, Gauss își exprimă frica de reacțiile pe care ideile sale despre geometrie le-ar putea provoca, dacă nu ar fi înțelese corespunzător.